Groupe A

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

AVERTISSEMENT

Les candidats sont invités à lire soigneusement la liste des définitions qui précède l'énoncé des questions.

Les parties I, II *et* III *sont indépendantes. On peut aborder l'étude des parties* IV, V *et* VI *sans avoir traité la partie* III.

Les correcteurs tiendront compte du soin apporté à la rédaction.

On rappelle que $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ désignent respectivement l'ensemble des entiers positifs, négatifs ou nuls, des rationnels, des réels, des complexes.

I

1° Montrer que pour tout réel $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a :

$$\frac{2}{\pi} x \leqslant \sin x \leqslant x$$

2° Soit $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Montrer que si la suite $\sin n\alpha\pi$ a une limite quand $n \in \mathbb{N}$ tend vers l'infini, la suite $\cos n\alpha\pi$ est aussi convergente (on pourra écrire $\sin (n+1)\alpha\pi$ à l'aide de $\sin n\alpha\pi$ et de $\cos n\alpha\pi$). En déduire que la suite $\sin n\alpha\pi$ n'est pas convergente.

II

Soit f une application continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{C}$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit le polynôme B_n de degré n par :

$$B_n(x) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} C_n^k \; f\left(\frac{k}{n}\right) \; x^k (1-x)^{n-k}$$

où les C_n^k sont les coefficients du binôme.

1° Calculer les polynômes :

$$\sum_{0 \leqslant k \leqslant n} k \; C_n^k \; x^k \; y^{n-k} \quad \text{et} \quad \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} k(k-1) \; C_n^k \; x^k \; y^{n-k}$$

2° On pose $r_k(x) = C_n^k \; x^k (1-x)^{n-k}$.

Calculer les polynômes :

$$\sum_{0 \leqslant k \leqslant n} r_k(x), \quad \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} k r_k(x), \quad \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} k(k-1) \; r_k(x).$$

En déduire l'égalité :

$$\sum_{0 \leqslant k \leqslant n} (k - nx)^2 \; r_k(x) = nx(1-x).$$

3° On rappelle que la fonction f, continue sur $[0, 1]$ est uniformément continue, i.e. pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta_\varepsilon > 0$, tel que pour $x \in [0, 1]$, $y \in [0, 1]$ et $|x - y| \leqslant \eta_\varepsilon$, on ait $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$. On pose $M = \sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f(x)|$.

Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$ on a :

$$|f(x) - B_n(x)| \leqslant \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \; r_k(x)$$

$$|f(x) - B_n(x)| \leqslant \varepsilon + \frac{M}{2n\eta_\varepsilon^2}$$

(on pourra considérer les k tels que $|k - nx| \leqslant n\eta_\varepsilon$ et ceux tels que $|k - nx| > n\eta_\varepsilon$).

4° En déduire que la suite des polynômes B_n converge uniformément vers f dans $[0, 1]$.

.../...

III

Soit g une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, périodique de période 1, c'est-à-dire telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x+1) = g(x)$.

1° On suppose g impaire, dérivable en $x = 0$ et $x = \frac{1}{2}$.

Montrer qu'il existe une application h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, continue, paire, périodique de période 1, telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g(x) = h(x) \sin 2\pi x$$

2° On suppose seulement g impaire.

Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une application h_ε de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, continue, paire, périodique de période 1, telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$| g(x) - h_\varepsilon(x) \sin 2\pi x | \leqslant \varepsilon.$$

3° Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une application P_ε de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$:

$$x \to P_\varepsilon(x) = \sum_{p \in A} a_p e^{2i\pi px}$$

où A est un sous-ensemble fini de $\mathbb{Z}$, $a_p \in \mathbb{C}$, telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$| g(x) - P_\varepsilon(x) | \leqslant \varepsilon$$

(on pourra le montrer d'abord pour g paire, puis pour g impaire).

4° Soit $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Montrer que :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{1 \leqslant q \leqslant n} g(q\alpha) \right) = \int_0^1 g(x)\, dx.$$

5° Soit : $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Montrer que l'ensemble des nombres $e^{in\alpha\pi}$, $n \in \mathbb{N}$ est dense dans l'ensemble des nombres complexes de module 1. Retrouver ainsi le résultat de I, 2°.

IV

1° Montrer que pour tout nombre rationnel $\frac{p}{q} > 0$, où q est un entier $\geqslant 1$, il existe une unique famille d'entiers $\{k, a_1, \ldots, a_k\}$, $k \geqslant 1$, $a_1 \geqslant 0$, $a_k > 0$ $0 \leqslant a_i < i$, pour tout entier i s'il en existe, tel que : $2 \leqslant i \leqslant k$, telle que :

$$\frac{p}{q} = \frac{a_1}{1!} + \frac{a_2}{2!} + \ldots + \frac{a_k}{k!}$$

2° i. Soit $(a_k)_{k \geqslant 1}$ une suite d'entiers telle que $0 \leqslant a_k < k$ pour $k \geqslant 2$.

Montrer que la série $\sum_{k \geqslant 1} \frac{a_k}{k!}$ est convergente.

ii. Calculer la somme de la série $\sum_{k \geqslant p+2} \frac{k-1}{k!}$: pour tout entier $p \geqslant 0$.

iii. Soit $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, $\alpha > 0$. Montrer qu'il existe une unique suite d'entiers $\geqslant 0, (a_k)$ telle que $a_1 \geqslant 0$, pour tout $k \geqslant 2$, $0 \leqslant a_k < k$ et

$$\alpha = \sum_{k \geqslant 1} \frac{a_k}{k!}.$$

3° Soit $l \in [-1, 1]$. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ tel que :

$$\lim_{n \to +\infty} \sin(n!\, \alpha\, 2\pi) = l.$$

V

Soit G un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ distinct de $\{0\}$. On pose :

$$G^+ = \{ x, x \in G, x > 0 \}$$

$$m = inf \{ x, x \in G^+ \}.$$

1° On suppose que $m \in G^+$; montrer que, pour tout $x \in G$, il existe $p \in \mathbb{Z}$, tel que : $x = p\,m$.

2° On suppose $m \notin G^+$. Montrer qu'on a alors $m = 0$ et que tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ contient un élément de G.

3° Soit : $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, et h une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait :

$$h(x) = h(x + 1) + h(x + \alpha)$$

Montrer que h est constante.

4° Retrouver à l'aide de V.2° le résultat de III.5°.

VI

Soit : $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

1° Montrer qu'il existe une suite strictement croissante d'entiers $q_n > 0$, et une suite (p_n), $p_n \in \mathbb{Z}$, telles que :

$$\alpha\, q_n - 2p_n \to 0 \text{ quand } n \to +\infty.$$

2° Montrer que, pour tout $l \in [-1, 1]$, il existe une suite strictement croissante d'entiers > 0, q_n telle que :

$$\lim_{n \to +\infty} \sin(q_n\, \alpha\, \pi) = l$$

3° Calculer : $\lim_{n \to \infty} \sin(n!\, e\, \pi)$ et $\lim_{n \to \infty} n^3 \sin^2(n!\, e\, \pi)$.

4° On suppose : $\alpha = \sqrt{2}$.

i. Montrer que pour tout nombre rationnel $\frac{p}{q}$, où q est un entier $\geqslant 1$, tel que : $\left| \sqrt{2} - \frac{p}{q} \right| \leqslant 1$, on a :

$$\left| q\sqrt{2} - p \right| \geqslant \frac{1}{(1 + 2\sqrt{2})\, q}$$

ii. Soit (q_n) une suite strictement croissante d'entiers > 0 telle que $\lim_{n \to +\infty} \sin(q_n \sqrt{2}\, \pi) = 0$.

Montrer que, pour tout entier $k \geqslant 3$:

$$\lim_{n \to +\infty} q_n^k \sin^2(q_n \sqrt{2}\, \pi) = \infty$$

VII

Déterminer un nombre $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ et une suite strictement croissante (q_n) d'entiers > 0 tels que, pour tout entier $k \geqslant 0$:

$$\lim_{n \to +\infty} q_n^k \sin(q_n\, \alpha\, \pi) = 0$$

VIII

Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, a_1, \ldots, a_k$ des nombres réels tels que $0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_k < 1$.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, posons $c_n = \sum_{p=1}^{k} a_p \sin(n\, \pi\, \alpha_p)$.

1° Montrer que pour tout z complexe, $|z| < 1$, la série $\sum_{n \geqslant 0} c_n z^n$ est convergente et a pour somme :

$$\sum_{1 \leqslant p \leqslant k} \frac{a_p\, z \sin \alpha_p\, \pi}{1 - 2z \cos \alpha_p\, \pi + z^2}$$

2° On suppose que $\lim_{n \to \infty} c_n = 0$. Montrer que les coefficients a_p, $1 \leqslant p \leqslant k$, sont tous nuls.

FIN